PROPRIEDADES E PADRÕES DE NÚMEROS INTEIROS COM ALUNOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

José Luiz Magalhães de Freitas
E-mail: joseluizufms2@gmail.com
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/UFMS- Brasil

Tema: Pensamento Numérico
Modalidade: CB
Nivel educativo: 11-17 anos
Palavras chave: Aritmética; Números Inteiros, Educação Básica; Regularidades.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma sinopse de estudos que realizamos com alunos dos três níveis de escolaridade da educação básica, de grupos sociais diversos, tendo o conjunto dos números inteiros como campo experimental. Numa pesquisa com alunos de 4º e 5º anos do ensino fundamental investigamos contribuições do cálculo mental para ampliação do repertório de cálculo e do domínio de propriedades aritméticas. Nas outras pesquisas analisamos produções, bem como dificuldades de alunos da educação básica e pré-vestibulandos, diante de situações-problema envolvendo conteúdos de divisibilidade, paridade e padrões com números inteiros. Utilizamos como embasamento teórico para esses estudos a Teoria dos Campos Conceituais, a Teoria das Situações Didáticas e alguns elementos da Teoria Antropológica do Didático, tendo princípios metodológicos da Engenharia Didática como base para o desenvolvimento experimental. De modo geral, observamos que os alunos se envolvem nas atividades, permitindo analisar suas dificuldades, conceitos mobilizados, bem como identificar aprendizagens, tanto no que se refere aos conhecimentos das representações simbólicas quanto dos conceitos e propriedades envolvendo regularidades aritméticas.

Introdução

Nos estudos realizados optamos por utilizar os números inteiros como campo experimental, primeiramente pelo fato de ser esse conjunto – ou ao menos a parte dos naturais – familiar aos alunos, tornando-o acessível como base experimental de cálculos, permitindo compor e decompor números, efetuar operações e mobilizar propriedades das operações básicas. Além disso, na interface entre os campos da aritmética e da álgebra há uma grande variedade de problemas envolvendo temas como paridade, divisibilidade e sequências, que permitem aos alunos identificar regularidades de diferentes tipos, conjecturar e produzir justificativas. Observa-se que, de modo geral, os enunciados de propriedades e de conjecturas com números inteiros são fáceis de compreender, favorecendo tentativas de validação numérica experimental pelos alunos e a introdução ao mundo da álgebra, podendo conduzi-los a um percurso de estudos e descobertas, no campo também chamado de “aritmética generalizada”.

As atividades foram realizadas em três instituições de ensino, em sessões semanais. Na primeira investigamos contribuições do cálculo mental[1] para a aprendizagem de conceitos aditivos e multiplicativos por alunos do 4º e 5º ano do ensino fundamental, em situações didáticas vivenciadas de forma dialógica oral; a segunda foi centrada na análise de *conjecturas e provas* produzidas por alunos do ensino médio; na terceira, focamos o tema *divisibilidade*, com alunos pré-vestibulandos.

A seguir apresentamos concisamente análises de atividades que desenvolvemos com alunos do ensino fundamental, do ensino médio e pré-vestibulandos utilizando o conjunto dos números inteiros como campo experimental para exploração de conteúdos de aritmética e álgebra, no nível da educação básica.

Cálculo mental

Dessa pesquisa participaram alunos do 4º e 5º anos do ensino fundamental, na qual foi elaborada e aplicada uma sequência didática composta por três blocos: sistema de numeração decimal, operações aditivas e operações multiplicativas.

Foi possível perceber que diante das atividades propostas os alunos criaram diversas estratégias. Por exemplo, a aluna GV[2] ao identificar regularidades na sequência dos números anunciados:

> P: [...] Conta pra gente a partir de duzentos e treze, de cinco em cinco.
> GV: Duzentos e treze?!
> P: De cinco em cinco!
> GV: Duzentos e (pausa) nossa!! Duzentos e dezoito (risos) duzentos e vinte e três, duzentos e vinte e oito, duzentos e trinta e três, duzentos e trinta e oito.
> P: Tá! No começo você demorou fazer a contagem. O que você percebeu?
> GV: Percebi que eu falava oito, três, oito, três. Só mudava a dezena.

A percepção da regularidade apresentada no excerto ocorreu após outro aluno despertar a atenção da turma para essa questão, como podemos observar na seguinte fala: *Quando eu estava contando de cinco em cinco eu percebi que era quatro e nove toda hora* (JD). No entanto, o número escolhido para GV iniciar a contagem não foi o mesmo proposto a JD. Portanto, podemos descartar a hipótese de que houve apenas uma reprodução na regularidade observada pelo colega, pois ela conseguiu aplicar em outro caso, agilizando o cálculo.

[1] Empregamos aqui a expressão *cálculo mental* para nos referirmos ao cálculo *de cabeça* ou *pensado*, com auxílio da memória, mas sem a utilização de algoritmos escritos, podendo ser utilizada, no mesmo sentido, a expressão *cálculo oral*.

[2] Indicamos os alunos que participara das atividades da pesquisa por duas letras maiúsculas e por P o pesquisador.

Observamos também que eles usam propriedades como forma de facilitar o cálculo, por exemplo no excerto abaixo GV usa a comutativa:

> P: GV, três mais noventa e um?
> GV: Noventa e quatro!
> P: Como você descobriu?
> GV: Você colocou o três na frente, eu peguei e coloquei o noventa e um na frente e somei mais três. [...] Porque daí fica mais fácil para eu somar.

Os excertos revelam a percepção de regularidades numéricas, as quais foram utilizadas para efetuar os cálculos propostos, uma atitude que não se fazia presente no início da experimentação. A difusão de diversas estratégias na classe, após serem reconhecidas como eficazes, favoreceram que eles progredissem e que aos poucos as incorporassem ao seu repertório numérico.

A conduta experimental adotada, valorizando o confronto de idéias e estratégias, por meio da oralidade, foi utilizada durante todas as sessões, em particular no trabalho com cálculo mental envolvendo operações aditivas e multiplicativas. Não há espaço aqui para apresentarmos uma descrição detalhada do desenvolvimento das sessões com esses dois blocos de conteúdos. Para mais detalhes ver Guimarães e Freitas (2009).

Conjecturas e provas

Essa experimentação visou estudar a produção de provas por alunos da 3ª série do ensino médio na resolução de problemas envolvendo conjecturas no conjunto dos números inteiros. Foram analisadas descobertas, formulações, validações, representações matemáticas utilizadas e tipos de prova produzidos. O grupo de participantes foi constituído por 10 alunos de 3ª série do ensino médio de um colégio particular da cidade de Campo Grande, MS, que participaram de forma voluntária.

A experimentação foi realizada em 10 sessões semanais, cada uma com duração aproximada de 2 h, fora do horário de aulas. Em cada sessão, ao término de cada atividade, num tempo variando de 5 a 10 min, o professor-pesquisador realizava com a turma uma breve discussão sobre as produções e as dificuldades encontradas, buscando socializar e sistematizar os conhecimentos por eles mobilizados. Os conteúdos das sessões eram variados, incluindo, por exemplo, paridade, números figurados, múltiplos e sequências.

Foram identificadas várias provas do modelo de Balacheff (1988), como as do tipo *empirismo ingênuo*, nas quais os alunos se satisfazem com a verificação da validade para poucos casos particulares; as do tipo *experiência crucial*, em que, após verificar a validade para casos particulares, o aluno não se convence e verifica um caso que considera diferente, antes de aceitar como válida a conjectura; e as de nível conceitual mais elevado, baseadas em propriedades gerais e apresentadas por meio de um discurso dedutivo organizado, preciso e conciso.

Para dar ideia do trabalho realizado, descrevemos a seguir a solução apresentada pelo aluno LN numa das atividades iniciais, que pedia verificar e justificar a veracidade da afirmação: "*A soma de dois números pares é sempre par*". Para justificar essa afirmação o aluno LN verificou inicialmente para 2+2 = 4, 4 +32 = 36, mas não se contentou em verificar a validade para dois números *pequenos*, ou seja, não ficou convencido com a produção de uma prova do tipo *empirismo ingênuo* e verificou que a soma 4044 + 8316 = 12360, números de maior *ordem de grandeza*, produziu uma prova que consideramos do tipo *experiência crucial.*

O aluno BR produziu uma prova de nível conceitual mais elevado, que podemos denominar de *algébrica*, na qual fez uso da letra com os estatutos de *variável* e também de *número generalizado*. Diante da conjectura "*A soma de três números pares é sempre par"* ele apresentou a seguinte resposta: "*Verdadeiro. Se um número n inteiro é par, ele pode ser escrito na forma $n = 2a$, onde $a = n/2$ e $a \in$ Z.* $n_1 + n_2 + n_3 = 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 2\ (a_1 + a_2 + a_3)$", ressaltando, na última igualdade, que 2 é par, com a indicação por uma flecha. Observa-se ainda que BR teve o cuidado em usar letras e índices diferentes, o que mostra que ele percebeu que os números pares poderiam ser distintos.

Para esta atividade, quase todos demais alunos apresentaram respostas do tipo sim ou não, seguidas de exemplos. Houve casos, como o de LN, em que percebemos que o aluno não permaneceu no *empirismo ingênuo*, mas chegou à *experiência crucial*, na terminologia de Balacheff.

Divisores de um número

A atividade apresentada a seguir foi realizada com um grupo de alunos de um curso preparatório para o vestibular, idealizado num contexto de ações afirmativas, conforme Silva e Freitas (2010). Esse curso tem por finalidade possibilitar acesso e permanência no ensino superior de diversos grupos étnicos de baixa renda (afrodescendentes, indiodescendentes, portadores de necessidades especiais e brancos). Os alunos participantes da pesquisa (aproximadamente 10) eram voluntários. As sessões foram semanais, realizadas fora do horário de aulas.

Em cada sessão, os participantes, em grupos de dois ou três, foram desafiados a resolver situações-problema sobre divisibilidade. Trabalhamos com três tipos de atividades, que envolviam resto da divisão; múltiplos e divisores; e quantidade de divisores de um número. Para ilustrar esse trabalho experimental, apresentamos a seguir uma atividade do terceiro tipo (quantidade de divisores de um número), envolvendo a questão: "*Qual o maior inteiro menor que 1000 que possui 10 divisores?*".

Uma estratégia inicial de resolução dessa atividade consistiu em fatorar e em seguida determinar a quantidade de divisores de cada um dos números menores que 1000 (999, 998, 997 e assim por diante) até encontrar o maior número menor que 1000 que possua 10 divisores. Após fatorar o número 999 e representá-lo por $3^3 \cdot 37$, eles aplicaram a propriedade, já vista, pela qual se obtém o número de divisores de número expresso como produto de fatores primos, cujo enunciado é: "*Seja* $p_1^{n1} \ldots p_t^{nt}$ *a decomposição de um número a > 1 nas condições do Teorema Fundamental da Aritmética. Então o número de divisores positivos de a é dado por* $n(a) = (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \ldots (n_t + 1)$". Assim, para $3^3 \cdot 37$, os alunos adicionaram 1 a cada expoente da decomposição e efetuaram o produto $(3+1)\cdot(1+1) = 8$, descobrindo que a quantidade de divisores de 999 é 8.

Utilizando essa propriedade, determinaram o número de divisores de mais alguns números menores que 1000, mas logo perceberam que essa maneira de resolver era muito demorada e que deveria existir outro modo. Diante desse entrave por eles manifestado, interviemos perguntando: "Quais os números naturais que multiplicados resultam no número 10?". Após essa intervenção, retomaram a busca da solução, mas expirou o tempo da sessão. Pedimos que tentassem terminar em casa a resolução do problema, a qual analisaríamos no encontro seguinte.

Na semana seguinte, ao retomarmos o problema, uma estudante nos relatou verbalmente que, para solucioná-lo, levou cinco dias e que durante aquela semana, sempre que podia, voltou a pensar nele, até conseguir uma solução que a deixasse satisfeita. Perguntamos se ela havia retomado a estratégia utilizada no encontro anterior, que consistia em encontrar os divisores dos números imediatamente menores que 1000. Respondeu-nos que não e apresentou por escrito a seguinte descrição:

> Comecei o exercício de acordo com o encontro anterior, que para um número dar 10 divisores, um número qualquer fatorado em primo, os expoentes terão que ser um 4 e outro 1, pois pela regra para se encontrar a quantidade divisores de um número, [basta] somar 1 ao expoente e multiplicá-los, e o resultado será a quantia de divisores. Então a primeira tentativa foi pegar o menor primo e elevar 4 [à 4.ª potência] e o próximo passo foi encontrar outro primo elevando a 1 que multiplicado por 16, que é 2 elevado a quarta, daria próximo de um número maior e menor 1000.

A descrição revela que a primeira estratégia consistiu em encontrar os divisores de 999, de 998 e assim por diante, mas que, embora a estratégia também levasse à solução, foi abandonada. No entanto, foi necessário que a aluna retomasse a tarefa e descobrisse uma estratégia de resolução menos trabalhosa, usando adequadamente a propriedade que fornece o número de divisores de um número decomposto em fatores primos. Nessa busca da solução, o primeiro passo foi encontrar possíveis expoentes que, ao se lhes somar 1 e realizar o produto, davam resultado 10 e analisando o produto

□. □. = 10, conclui que os fatores devem ser 5 e 2 ou 1 e 10 e consequentemente os expoentes só podem ser 4 e 1 ou 9 e 0, pois ao somar 1 a esses expoentes e efetuar o produto, obtém-se $(4 + 1) \cdot (1 + 1) = 10$ ou $(9 + 1) \cdot (0 + 1) = 10$.

Após identificar os possíveis expoentes, ela deu início à investigação das possíveis bases, analisando primeiramente a possibilidade de o expoente ser 9, ou seja, $2^9 = 512$ e $3^9 = 19\,683$. Excluiu a possibilidade de 3^9 por ser um valor maior que 1000 e também 2^9 por ser bem menor que 1000. Com essa exclusão, concluiu que os expoentes deveriam ser 4 e 1 e realizou algumas tentativas como $3^4.37 = 81.37 = 2997$; $2^4.37 = 592$; $2^4.41 = 65$; $2^4.47 = 752$.

Quando lhe perguntamos sobre sua principal dificuldade em descobrir a solução do problema, ela respondeu que foi a de encontrar o número primo, pois este apresentava um valor que ela considerava alto. Acrescentou que estava habituada a trabalhar com números primos menores que 30 e que uma grande dificuldade foi identificar se um fator com expoente 1 era primo ou não. Esta principal dificuldade persistiu até que a aluna encontrasse o número procurado: $2^4 \cdot 61 = 976$.

Ao questionarmos outros alunos que também trabalharam na realização da tarefa durante a semana, detectamos que encontrar o número primo 61 foi a principal dificuldade encontrada pelo grupo.

Considerações finais

Os estudos e experimentações que realizamos em sala de aula nos fizeram crer que o conjunto dos números inteiros é um campo experimental fértil para introdução da álgebra elementar, que possibilita descobertas e a utilização de propriedades básicas das operações. Acreditamos que atividades do tipo que apresentamos poderiam ser mais exploradas pelos livros didáticos de matemática voltados à educação básica. Observamos que os alunos se envolveram em atividades desafiadoras com números inteiros, o que nos permitiu analisar conceitos aritméticos e algébricos mobilizados, bem como dificuldades e indícios de aprendizagens, tanto na utilização de representações simbólicas quanto nos níveis de conhecimentos aritméticos e algébricos envolvendo propriedades ou regularidades.

As experimentações realizadas com alunos do ensino médio e pré-vestibulandos (Freitas e Lima (2008), Silva e Freitas (2010)) mostraram que, diante de situações-problema ou conjecturas no conjunto dos números inteiros, eles se envolvem na busca de soluções, inicialmente investigando por meio de tentativas empíricas, mas evoluindo para a mobilização de propriedades, formulações, descobertas e procedimentos de validação e tornando-se capazes de identificar padrões, elaborar conjecturas e produzir provas. Nesse percurso de estudos em aritmética e álgebra, uma etapa importante é a identificação da regularidade e também sua representação, que deve tender a se tornar simbólica.

Referências

Artigue, M. (1988) Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, nº 3, pp. 281-308, Grenoble: La pensée sauvage.

Balacheff, N. (1988) *Une étude des processus de preuve en Mathématique chez les élèves de collège.* Tese de Doutorado. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Brousseau, G. (1996) Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. En: Brun, J. (Ed.), *Didática das Matemáticas* **(**pp. 35-113). Lisboa: Instituto Piaget.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascon, J. (2001) *Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.* Porto Alegre: Artmed.

Freitas, J. L. M.; Lima, A. V. M. C. (2008) *Produções de alunos do ensino médio diante de conjecturas no conjunto dos números inteiros*. Recife-PE: anais do 2.º SIPEMAT. Recife: UFPE.

Guimarães, S. D. e Freitas, J. L. M. (2009) *Um caso exemplar: contribuições de uma prática regular de cálculo mental*. Taguatinga-DF: anais do IV SIPEM.

Silva, M. F.; Freitas, J. L. M. (2010) *Estudos de um grupo em fase preparatória pra o vestibular sobre divisibilidad*e. Campo Grande: Anais do IV SESEMAT.

Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, n. 2.3, pp. 133-170, Grenoble: La Pensée Sauvage.